20.01.2022

Ad Soyad :

Numara :

İmza :

SOYUT MATEMATİK I FİNAL SINAVI SORULARI

1. a) $[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \vee q) \Rightarrow r]$ önermesinin totoloji olup olmadığını inceleyiniz.

b) $S=\{0,1,2,3,4,5\}$ olduğuna göre, S kümesinde tanımlanan aşağıdaki önermelerden her birinin doğruluk değerlerini bulunuz ve değillerini yazınız.

i) $\exists x \in S,\ x+2=5$

ii) $\exists x \in S,\ x+2<5$

iii) $\forall x \in S,\ x+2<5$

iv) $\forall x \in S,\ x+2 \leq 16$

2. A ve B kümeleri için

a) $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$

b) $P(A \cup B) \subseteq P(A) \cup P(B)$

olur mu? Gösteriniz.

3. a) $f: A \to B$ bir fonksiyon ve A üzerinde bir β denklik bağıntısı her $x_1, x_2 \in A$ için $x_1 \beta x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$ olarak tanımlansın. $g(\bar{x}) = f(x)$ ile tanımlı $g: A/\beta \to B$ dönüşümünün iyi tanımlı ve 1-1 bir fonksiyon olduğunu gösteriniz.

b) A, B, C kısmi sıralı kümeler olsun. $f: A \to B$ ve $g: B \to C$ sırasal eş yapı fonksiyonları ise $g \circ f: A \to C$ fonksiyonunun da bir sırasal eşyapı fonksiyonu olduğunu gösteriniz.

4. R, X kümesi üzerinde bir bağıntı olsun.

a) R, denklik bağıntısı ise R^{-1} de denklik bağıntısı mıdır?

b) R, sıralama bağıntısı ise R^{-1} de sıralama bağıntısı mıdır?

Gösteriniz.

5. H bir grup, $a \in H$ olsun. $\forall x \in H$ için $g(x) = ax$ ile tanımlı $g: H \to H$ fonksiyonu 1-1 ve örten midir? Gösteriniz.

Başarılar

CEVAPLAR

1) a) $A = [(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \vee q) \Rightarrow r]$ olsun.

p	q	r	$p \Rightarrow r$	$q \Rightarrow r$	$p \vee q$	$(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$	$(p \vee q) \Rightarrow r$	A
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	0	1	1	1

$\therefore$ A önermesi totolojidir.

b) i) $3 \in S$ için $3+2=5$ olup $\exists x \in S,\ x+2=5$ önermesinin doğruluk değeri 1 dir.

$$[\exists x \in S,\ x+2=5]' \equiv \forall x \in S,\ x+2 \neq 5$$

ii) $1 \in S$ için $1+2<5$ olup $\exists x \in S,\ x+2<5$ önermesinin doğruluk değeri 1 dir.

$$[\exists x \in S,\ x+2<5]' \equiv \forall x \in S,\ x+2 \geq 5$$

iii) $4 \in S$ için $4+2 \not< 5$ olup $\forall x \in S,\ x+2<5$ önermesinin doğruluk değeri 0 dır.

$$[\forall x \in S,\ x+2<5]' \equiv \exists x \in S,\ x+2 \geq 5$$

iv) $\forall x \in S,\ x+2 \leq 16$ önermesinin doğruluk değeri 1 dir.

$$[\forall x \in S,\ x+2 \leq 16]' \equiv \exists x \in S,\ x+2 > 16$$

2) $(\Rightarrow:)$ $X \in P(A \cap B) \Rightarrow X \subseteq A \cap B$

$\Rightarrow X \subseteq A \wedge X \subseteq B$

$\Rightarrow X \in P(A) \wedge X \in P(B)$

$\Rightarrow X \in P(A) \cap P(B)$ --- 1

$(\Leftarrow)$ $X \in P(A) \cap P(B) \Rightarrow X \in P(A) \wedge X \in P(B)$

$\Rightarrow X \subseteq A \wedge X \subseteq B$

$\Rightarrow X \subseteq A \cap B$

$\Rightarrow X \in P(A \cap B)$ ---- (2)

(1) ve (2) den $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$ elde edilir.

b) $A = \{1,2\}$ $B = \{1,3\}$ olsun. $A \cup B = \{1,2,3\}$

$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, A\}$

$P(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, B\}$

$P(A \cup B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, A, B, \{2,3\}, A \cup B\}$

$P(A) \cup P(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, A, B\}$

$\therefore P(A \cup B) \not\subseteq P(A) \cup P(B)$

3) g iyi tanımlı mı?

$\forall \bar{x}, \bar{y} \in A/\beta$ için $\bar{x} = \bar{y} \Rightarrow g(\bar{x}) = g(\bar{y})$?

$\bar{x} = \{m \in A : x \beta m\} = \{m \in A : f(x) = f(m)\}$

$\bar{y} = \{m \in A : y \beta m\} = \{m \in A : f(y) = f(m)\}$

$\bar{x} = \bar{y} \Rightarrow f(x) = f(y)$

$\Rightarrow g(\bar{x}) = g(\bar{y})$

$\therefore$ g iyi tanımlıdır.

g 1-1 mi?

$\forall \bar{x}, \bar{y} \in A/\beta$ için $g(\bar{x}) = g(\bar{y}) \Rightarrow \bar{x} = \bar{y}$?

$$g(\bar{x}) = g(\bar{y}) \Longrightarrow f(x) = f(y)$$
$$\Longrightarrow x \beta y$$
$$\Longrightarrow \bar{x} = \bar{y}$$

$\therefore$ g 1-1 dir.

b) $f: A \to B$, $g: B \to C$ fonksiyonları SEF olduğundan 1-1 ve örtendir. Ayrıca f^{-1} ve g^{-1} de SEF dir.

$gof: A \longrightarrow C$ olmak üzere

• $\forall x, y \in A$ için $(gof)(x) = (gof)(y) \Rightarrow g(f(x)) = g(f(y))$
$$\underset{g\ 1\text{-}1}{\Longrightarrow} f(x) = f(y)$$
$$\underset{f\ 1\text{-}1}{\Longrightarrow} x = y$$

olup gof 1-1 dir.

• $\forall c \in C$ için $\exists a \in A \ni (gof)(a) = c$?

$c \in C$ için $g(b) = c$ o.s. $\exists b \in B$ vardır (g örten)

$b \in B$ için $f(a) = b$ o.s. $\exists a \in A$ vardır (f örten)

$a \in A$ için $(gof)(a) = g(f(a))$
$$= g(b)$$
$$= c$$

olup gof örtendir.

• $\forall x, y \in A$ için $x \leq y \Leftrightarrow (gof)(x) \leq (gof)(y)$?

$x \leq y \underset{f^{-1}\,\text{SEF}}{\Longleftrightarrow} f(x) \leq f(y)$ (f, SEF)
$$\underset{g^{-1}\,\text{SEF}}{\Longleftrightarrow} g(f(x)) \leq g(f(y)), \quad (f(x), f(y) \in B,\ g,\ \text{SEF})$$
$$\Longleftrightarrow (gof)(x) \leq (gof)(y)$$

$\therefore$ gof, SEF dir.

4) a) • $\forall x \in X$ için $(x,x) \in R^{-1}$?

R denklik bağıntısı olduğundan $(x,x) \in R$ dir.

$\therefore (x,x) \in R^{-1}$ dir.

• $\forall x,y \in X$ için

$(x,y) \in R^{-1} \Rightarrow (y,x) \in R^{-1}$?

$(x,y) \in R^{-1} \Rightarrow (y,x) \in R$

$\Rightarrow (x,y) \in R$, (R denklik bağıntısı)

$\Rightarrow (y,x) \in R^{-1}$

• $\forall x,y,z \in X$ için

$(x,y) \in R^{-1}$ ve $(y,z) \in R^{-1} \Rightarrow (x,z) \in R^{-1}$?

$(x,y) \in R^{-1}$ ve $(y,z) \in R^{-1} \Rightarrow (y,x) \in R$ ve $(z,y) \in R$

$\Rightarrow (z,x) \in R$, (R denk. bağ.)

$\Rightarrow (x,z) \in R^{-1}$

$\therefore R^{-1}$ bir denklik bağıntısıdır.

b) (a) şıkkında yansıma ve geçişme özellikleri gösterildiği için sadece ters simetriye bakmak yeterlidir.

• $\forall x,y \in X$ için $(x,y) \in R^{-1}$ ve $(y,x) \in R^{-1} \Rightarrow x = y$?

$(x,y) \in R^{-1}$ ve $(y,x) \in R^{-1} \Rightarrow (y,x) \in R$ ve $(x,y) \in R$

$\Rightarrow x = y$, (R sıralama bağ.)

$\therefore R^{-1}$ bir sıralama bağıntısıdır.

5) • g 1-1 mi?

$\forall x,y \in H$ için $g(x) = g(y) \Rightarrow x = y$?

$g(x) = g(y) \Rightarrow ax = ay$

$\Rightarrow a^{-1}(ax) = a^{-1}(ay)$, $\left(\begin{array}{c} a \in H \\ H \text{ grup}, a^{-1} \in H \end{array} \right)$

$\Rightarrow (a^{-1}a)x = (a^{-1}a)y$, birleşme öz.

$\Rightarrow x = y$

$\therefore$ g 1-1 dir.

• g örten mi?

$\forall y \in H$ için $\exists x \in H \ni g(x) = y$?

$\left. \begin{array}{l} a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H \\ y \in H \end{array} \right\} \Rightarrow a^{-1}y \in H$

$g(a^{-1}y) = a(a^{-1}y) = (aa^{-1})y = y$ olduğundan

g örtendir.